

KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

TEORIJA VJEROVATNOĆE

- 1. Uslovna vjerovatnoća**
- 2. Totalna vjerovatnoća**
- 3. Bajesova teorema**

Uslovna vjerovatnoća

- **apsolutna vjerovatnoća** $P(A)$ događaja A je ona koja samo zavisi od uslova koji proističu iz realizacije eksperimenta
- **uslovna vjerovatnoća** $P(A|B)$ je vjerovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B koji ima pozitivnu vjerovatnoću $P(B)$.
 - Ako je $P(B) > 0$, onda je uslovna vjerovatnoća događaja A, pod uslovom da se realizovao događaj B, jednaka

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Vjerovatnoća proizvoda dva događaja jednaka je proizvodu vjerovatnoće jednog od njih i uslovne vjerovatnoće drugog, pod uslovom da se prvi događaj realizovao

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B), \text{ odnosno za slučaj tri događaja}$$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \quad *$$

Nezavisni i zavisni događaji

- Neka su A i B dva događaja nekog eksperimenta. Ako ostvarivanje jednog od njih ne utiče na vjerovatnoću ostvarivanja drugog događaja, kažemo da su ti događaji **nezavisni**

kod nezavisnih događaja je : $P(A|B)=P(A)$ i $P(B|A)=P(B)$, pa kad se to zamijeni u formulu uslovne vjerovatnoće

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad \text{slijedi: } P(AB)=P(A) \times P(B)$$

Događaji A i B su nezavisni ako je vjerovatnoća njihovog proizvoda jednaka proizvodu njihovih vjerovatnoća.

- Obrnuto, ako ostvarivanje jednog od događaja utiče na vjerovatnoću ostvarivanja drugog događaja, onda kažemo da su ti događaji **zavisni**

Uslovna vjerovatnoća

- **Primjer 1.** Eksperiment se sastoji u bacanju dvije kockice za igru. Ako su kockice pokazale zbir 10, kolika je vjerovatnoća da na jednoj od njih bude broj 6?

Rješenje. Neka je događaj A: „ Na jednoj od kockica je pao broj 6“ , događaj B: „ Zbir brojeva na obe kockice je 10“ . Traži se $P(A|B)$, odnosno vjerovatnoća da je pao je broj 6 pod uslovom za je zbir 10. Po formuli za uslovnu vjerovatnocu: je

$$P(A|B)=P(AB)/P(B).$$

U bacanju dvije kockice elementarni događaj može biti uređeni par (x,y) , gdje x predstavlja broj na prvoj, a y broj na drugoj kockici, pri čemu $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$ i $y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Pošto se x može realizovati na 6 načina, a nezavisno od toga se i y može realizovati na 6 načina, ukupno **može biti $6 \cdot 6 = 36$ elementarnih događaja ($n=36$)**. To smo mogli sračunati i kao broj varijacija sa ponavljanjem 2.og razreda od 6 brojeva, odnosno $V=6^2$

Uredjeni parovi kod kojih je zbir 10 su $\{(4,6) (5,5) (6,4) (5,5)\}$, dakle ukupno ih ima 4, odnosno **$m(B)=4$** , a vjerovatnoća događaja B je **$P(B)=4/36$**

Uredjeni parovi kod kojih je makar jedna šestica i zbir 10 su $\{(4,6) (6,4)\}$, dakle ukupno ih ima 2, odnosno **$m(A)=2$** , a vjerovatnoća je **$P(AB)=2/36$**

Prema formuli je : **$P(A|B)=P(AB)/P(B)=(2/36)/(4/36)=0,5$**

- **Primjer 16.** U kutiji se nalazi 10 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 10 Izvlačimo na slučajan način tri ceduljice, jednu za drugom, bez vraćanja. Kolika je vjerovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu parni brojevi?

Rješenje. Neka je događaj A: „ Na prvoj ceduljici je izvučen paran broj “ , događaj B: „Na drugoj ceduljici je izvučen paran broj“, događaj C: „Na trećoj ceduljici je izvučen paran broj“. Kako su događaji zavisni, biće

$$P(ABC)=P(A) P(B|A) P(C|AB) = (5/10) \times (4/9) \times (3/8) = 1/12$$

Totalna vjerovatnoća

- Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta i neka su H_1, H_2, \dots, H_n slučajni događaji (**hipoteze**) koji čine potpun sistem događaja tog eksperimenta, $S = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$ i važi da je $H_i \cap H_j = \emptyset$, za $i, j, i, j = 1, 2, \dots, n$. Neka je A neki događaj takav da je $A \subset S$, tada je $A = S \cap A$, odnosno $A = (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \dots H_n) \cap A$.

Koristeći distributivnost presjeka prema uniji imamo:

$$A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \dots \cup (H_n \cap A)$$

Kako su događaji H_1, H_2, \dots, H_n po pretpostavci međusobno isključivi, to su i događaji $H_1 \cap A, H_2 \cap A, \dots, H_n \cap A$ međusobno isključivi, pa je vjerovatnoća ove unije jednaka zbiru vjerovatnoća

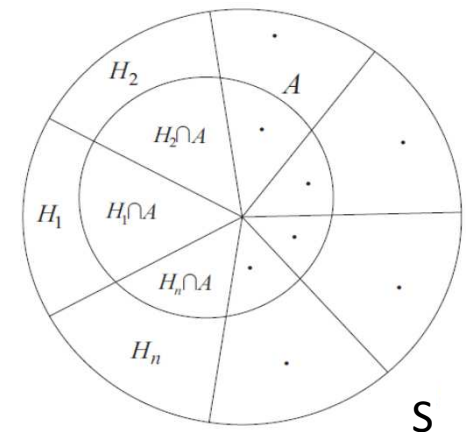
$$P(A) = P(H_1 \cap A) + P(H_2 \cap A) + \dots + P(H_n \cap A)$$

Međutim, za svako k ($1 \leq k \leq n$) važi da je $P(H_k \cap A) = P(H_k)P(A|H_k)$ –na osnovu uslovne vjerovatnoće za realizaciju događaja A , ako se realizovao događaj H_k

Potpuna ili totalna vjerovatnoća je:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

vjerovatnoće $P(H_k)$ su obično poznate unaprijed (**a priori**)



Bajesova teorema

- Ako su:
 - $H_1; H_2, \dots, H_n$ međusobno nesaglasni (isključivi) događaji i
 - $P(H_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) i
 - $H_1 + H_2 + \dots + H_n = S$, tada je

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)}$$

- Ova formula daje mogućnost da se sračuna vjerovatnoća da se realizovala hipoteza H_k ako se realizovao događaj A . To bi bila **a posteriorna** vjerovatnoća hipoteze H_k
- Bayesovu formulu koristimo kad želimo naći istinitu hipotezu iz skupa od n postavljenih hipoteza H_i ; $i = 1, 2, \dots, n$; ako znamo da se dogodio događaj A . Za svako i računamo $P(H_i|A)$. Ispravnom se smatra ona hipoteza H_{i_0} za koju je $P(H_{i_0}|A) \approx 1$

Totalna vjerovatnoća i Bajesova teorema

- **Primjer 2.** Tri mašine M1, M2 i M3 učestvuju u ukupnoj proizvodnji u razmjeri 60 :30 : 10. Mašina M1 proizvodi 2%, mašina M2 3% i mašina M3 4% neispravnih proizvoda. Ako se slučajno izabere jedan proizvod koji je neispravan, kolika je vjerovatnoća da je bio napravljen na mašini M3

Rješenje. Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H1 = "izabrani predmet je sa M1", $P(H1) = 60/100$

H2 = "izabrani predmet je sa M2", $P(H2) = 30/100$

H3 = "izabrani predmet je sa M3", $P(H3) = 10/100$

$H_i \cap H_j = \emptyset$, za $i, j, i, j=1,2,3$ $S=H1 \cup H2 \cup H3$

Događaj A koji se dogodio: A="izabrani proizvod je neispravan".

Zadate su uslovne vjerovatnoće događaja A uz uslov pojedine hipoteze:

$P(A|H1) = 2/100$, $P(A|H2) = 3/100$, $P(A|H3) = 4/100$

Treba odrediti $P(H3|A)$ uz pomoć Bayesovu formule:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{\sum_{k=1}^3 P(H_k) \cdot P(A|H_k)} = \frac{\frac{10}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{60}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{4}{100}} = \frac{4}{25} = 0,16$$

Totalna vjerovatnoća i Bajesova teorema

- **Primjer 3.** Pretpostavlja se da 5% muškaraca i 0,25% žena boluje od daltonizma. Grupa je formirana od 20 žena i 5 muškaraca. Kolika je vjerovatnoća da je iz grupe izabrana osoba ženskog pola ako se zna da boluje od daltonizma?

Rješenje. Postavljamo hipoteze-potpun sistem događaja:

H_1 = "izabrana osoba je muskog pola", $P(H_1) = 5/25=1/5$

H_2 = " izabrana osoba je zenskog pola", $P(H_2) = 20/25=4/5$

$H_i \cap H_j = \emptyset$, za $i, j, i, j=1,2$ $S=H_1 \cup H_2$

Događaj A koji se dogodio: A ="izabrana osoba boluje od daltonizma".

Zadate su uslovne vjerovatnoće događaja A uz uslov pojedine hipoteze:

$P(A|H_1) = 5/100$, $P(A|H_2) = 0,25/100$,

Treba odrediti $P(H_2|A)$ uz pomoć Bayesovu formule:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{\sum_{k=1}^2 P(H_k) \cdot P(A|H_k)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{0,25}{100}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{100} + \frac{4}{5} \cdot \frac{0,25}{100}} = \frac{1}{6}$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beograd, 1986
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pregled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- <http://www.e-statistika.rs>
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), <http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf>